UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS
FACULTAD DE CIENCIAS PURAS Y NATURALES
CURSO PREUNIVERSITARIO

EXAMEN PRIMER PARCIAL - INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA

LA PAZ, 18 DE MAYO DE 2024

SOLUCIONARIO - FILA A

Preguntas y Soluciones

1. (7 pts) Simplifica la siguiente expresión algebraica:

$$A = \frac{x^2\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-2} - 2x^2 + y^2}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 + 2\sqrt{xy}}$$

Solución:

Dada la expresión:

$$A = \frac{x^2\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-2} - 2x^2 + y^2}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 + 2\sqrt{xy}}$$

Podemos simplificarla de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{x^2\left(\dfrac{y}{x}\right)^{2} - 2x^2 + y^2}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 + 2\sqrt{xy}} \\
&= \frac{x^2\left(\dfrac{y^2}{x^2}\right) - 2x^2 + y^2}{x - 2\sqrt{xy} + y + 2\sqrt{xy}} \\
&= \frac{y^2 - 2x^2 + y^2}{x+y} \\
&= \frac{2y^2 - 2x^2}{x+y} \\
&= \frac{2(y-x)(y+x)}{x+y} \\
&= 2(y-x)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la expresión simplificada es: $A = 2(y-x)$

$\blacksquare$

2. (7 pts) Factorizar la siguiente expresión algebraica:

$$E = (a+b)^9\,(a-b)^5 - \left(a^2-b^2\right)^7$$

Solución:
Transformemos previamente:
$(a^2-b^2)^7 = [(a+b)(a-b)]^7 = (a+b)^7(a-b)^7$

De este modo:

$$E = (a+b)^9\,(a-b)^5 - (a+b)^7(a-b)^7$$

extrayendo factor común $(a+b)^7(a-b)^5$:

$$E = (a+b)^7\,(a-b)^5\left[(a+b)^2 - (a-b)^2\right]$$

notese que $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$ por lo que:

$$E = 4ab\,(a+b)^7\,(a-b)^5$$

■

3. (7 pts) Considere el siguiente polinomio $x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 2kx - k^2$.

   a) Hallar el o los valores de k para que al dividir $x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 2kx - k^2$ entre $(x-2)$, tenga residuo -9.

   b) Con el valor de k encontrado en el inciso anterior, escriba el o los polinomios $P(x)$ que satisfacen las condiciones el inciso (a)

Solución:
(a) Sea $P(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 2kx - k^2$. Por el teorema del resto, se cumple $P(2) = R$, donde R es el resto de la división.

Como $R = -9$, entonces

$$\begin{aligned} P(2) &= -9 \\ 2^4 - 5(2)^3 + 3(2)^2 + 2k(2) - k^2 &= -9 \\ k^2 - 4k + 3 &= 0 \\ (k-3)(k-1) &= 0 \quad \Longrightarrow \quad k = 3 \quad \text{o} \quad k = 1. \end{aligned}$$

Por tanto los valores de k son: $k = 3$ ó $k = 1$.

(b) Con estos valores tenemos los polinomios $x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 6x - 9$, $x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 2x - 1$ los cuales al dividir entre $(x-2)$ dejan resto igual a -9.

■

4. (7 pts) Hallar las soluciones reales de:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} - \dfrac{26}{5} = \dfrac{y-x}{x+y} \\ xy = 6 \end{cases}$$

Solución: Aplicando propiedades aritméticas tenemos

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} - \dfrac{26}{5} = \dfrac{y-x}{x+y} \\ xy = 6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} - \dfrac{y-x}{x+y} = \dfrac{26}{5} \\ xy = 6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x^2+2y^2}{x^2-y^2} = \dfrac{26}{5} \\ xy = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2 - 9y^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ xy = 6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

de la ecuacion (1): $x = \pm\frac{3}{2}y$.

Si $x = \frac{3}{2}y$, reemplazando en (2) tenemos $y^2 = 4 \to y = \pm 2$.

Si $x = -\frac{3}{2}y$, reemplazando en (2) tenemos $y^2 = -4$, el cual no tiene solución en los reales.

Por tanto las soluciones reales del sistema son: $(x = 3, y = 2)$ o $(x = -3, y = -2)$

■

5. (7 pts) Hallar el valor de m de manera que en la ecuación cuadrática $mx^2-(1+m)x+3m+2 = 0$, la suma de las raices sea el doble del productos de las mismas.

Solución:
Sean x_1, x_2 raíces o soluciones de la ecuación cuadrática $mx^2-(1+m)x+3m+2 = 0$, las cuales deben satisfacer

$$x_1 + x_2 = 2x_1x_2. \tag{1}$$

Por otro lado por la relación de raíces y coeficientes de una ecuación cuadrática tenemos

$$x_1 + x_2 = 1 + m/m \tag{2}$$
$$x_1x_2 = 3m + 2/m \tag{3}$$

Reemplazando las ecuaciones (2) y (3) en la ecuación (1) tenemos:

$$\frac{1+m}{m} = 2\left(\frac{3m+2}{m}\right) \quad \Longrightarrow \quad m = -\frac{3}{5}.$$

Verificando: Reemplazando el valor encontrado de m en la ecuación cuadrática se tiene:

$$-\frac{3}{5}x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{5} = 0$$

resolviendo tenemos dos soluciones: $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

Las cuales verifican que la suma de las raices es el doble del productos de las mismas.

■