Universidad Mayor de San Andrés
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Curso Preuniversitario

EXAMEN PRIMER PARCIAL - INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA
La Paz, 18 de Mayo de 2024
SOLUCIONARIO - FILA B

Preguntas y Soluciones

1. (7 pts) Simplifica la siguiente expresión algebraica:

$$B = \frac{b^2 + a^2\left(\frac{a}{b}\right)^{-2} - 2a^2}{\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)^2 + 2\sqrt{ab}}$$

Solución:

Dada la expresión:

$$A = \frac{a^2\left(\frac{a}{b}\right)^{-2} - 2a^2 + b^2}{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 + 2\sqrt{ab}}$$

Podemos simplificarla de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A &= \frac{a^2\left(\frac{b}{a}\right)^{2} - 2a^2 + b^2}{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 + 2\sqrt{ab}} \\ &= \frac{a^2\left(\frac{b^2}{a^2}\right) - 2a^2 + b^2}{a - 2\sqrt{ab} + b + 2\sqrt{ab}} \\ &= \frac{b^2 - 2a^2 + b^2}{a+b} \\ &= \frac{2b^2 - 2a^2}{a+b} \\ &= \frac{2(b-a)(b+a)}{a+b} \\ &= 2(b-a) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la expresión simplificada es: $A = 2(b-a)$.

■

2. (7 pts) Factorizar la siguiente expresión algebraica:

$$E = (x+y)^{10}(x-y)^6 - \left(x^2 - y^2\right)^8$$

Solución:
Transformemos previamente:
$(x^2 - y^2)^8 = [(x+y)(x-y)]^8 = (x+y)^8(x-y)^8$

De este modo:

$$E = (x+y)^{10}\,(x-y)^6 - (x+y)^8 (x-y)^8$$

extrayendo factor común $(x+y)^8(x-y)^6$:

$$E = (x+y)^8\,(x-y)^6\left[(x+y)^2 - (x-y)^2\right]$$

notese que $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$ por lo que:

$$E = 4xy\,(x+y)^8\,(x-y)^6$$

■

3. (7 pts) Sea el polinomio de cuarto grado $P(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 3kx + k^2$.

   a) Hallar el o los valores de k para que al dividir $P(x)$ entre $(x-3)$, tenga residuo 13.

   b) Con el valor de k encontrado en el inciso anterior, escriba el o los polinomios $P(x)$ que satisfacen las condiciones el inciso (a)

   Solución:
   Sea $P(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 3kx + k^2$. Por el teorema del resto, se cumple $P(3) = R$, donde R es el resto de la división.

   Como $R = 13$, entonces

$$\begin{aligned} P(3) &= 13 \\ 3^4 - 4(3)^3 + 2(3)^2 + 3k(3) + k^2 &= 13 \\ k^2 + 9k - 22 &= 0 \\ (k+11)(k-2) &= 0 \quad \Longrightarrow \quad k = -11 \quad \text{o} \quad k = 2. \end{aligned}$$

   Por tanto los valores de k son: $k = -11$ ó $k = 2$.

   Con estos valores tenemos los polinomios $x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 33x + 121$, $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 6x + 4$ los cuales al dividir entre $(x-3)$ dejan resto igual a 13.

■

4. (7 pts) Hallar las soluciones reales de:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} - \dfrac{50}{7} = -\dfrac{x-y}{x+y} \\ xy = -3 \end{cases}$$

   Solución: Aplicando propiedades aritméticas tenemos

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} - \dfrac{50}{7} = -\dfrac{x-y}{x+y} \\ xy = -3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{50}{7} \\ xy = -3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x^2+2y^2}{x^2-y^2} = \dfrac{50}{7} \\ xy = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x^2 - 16y^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ xy = -3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

   de la ecuacion (1): $x = \pm\dfrac{4}{3}y$.

Si $x = -\frac{4}{3}y$, reemplazando en (2) tenemos $y^2 = \frac{9}{4} \to y = \pm\frac{3}{2}$.

Si $x = \frac{4}{3}y$, reemplazando en (2) tenemos $y^2 = -\frac{9}{4}$, el cual no tiene solución en los reales.

Por tanto las soluciones reales del sistema son: $\left(x = -2, y = \frac{3}{2}\right)$ o $\left(x = 2, y = -\frac{3}{2}\right)$

■

5. (7 pts) Hallar el valor de m de manera que en la ecuación cuadrática $mx^2+(1-m)x+2m+1 = 0$, la suma de las raices sea el doble del productos de las mismas.

   Solución:

   Sean x_1, x_2 raíces o soluciones de la ecuación cuadrática $mx^2+(1-m)x+2m+1 = 0$, las cuales deben satisfacer

$$x_1 + x_2 = 2x_1x_2. \tag{1}$$

Por otro lado por la relación de raíces y coeficientes de una ecuación cuadrática tenemos

$$x_1 + x_2 = -\frac{1-m}{m} \tag{2}$$

$$x_1x_2 = \frac{2m+1}{m} \tag{3}$$

Reemplazando las ecuaciones (2) y (3) en la ecuación (1) tenemos:

$$-\frac{1-m}{m} = 2\left(\frac{2m+1}{m}\right) \quad \Longrightarrow \quad m = -1.$$

Verificando: Reemplazando el valor encontrado de m en la ecuación cuadrática se tiene:

$$-x^2 + 2x - 1 = 0$$

resolviendo tenemos dos soluciones repetidas: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$.

Las cuales verifican que la suma de las raices es el doble del productos de las mismas.

■