UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS
FACULTAD DE CIENCIAS PURAS Y NATURALES
DIRECCIÓN DE ADMISIÓN FACULTATIVA

MAT 99 - INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA
SEGUNDO PARCIAL (II – 2022) – LUNES 28 DE NOVIEMBRE DE 2022

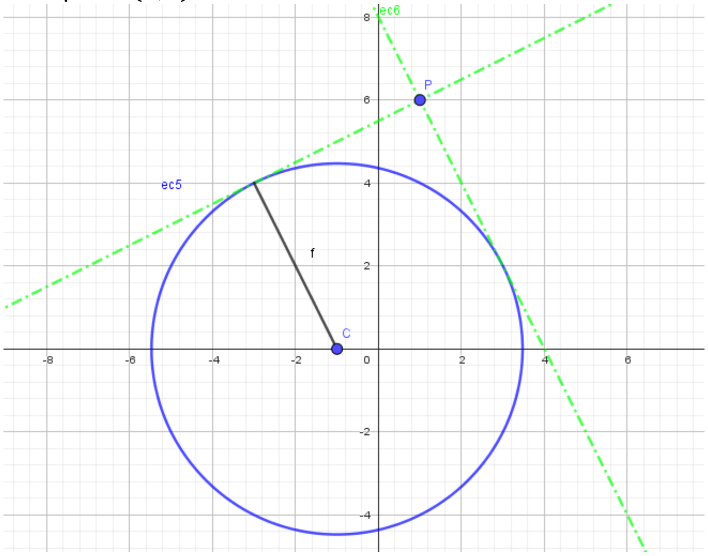
RELATORIA - SOLUCIONARIO

Tiempo del examen 90 minutos

PREGUNTAS

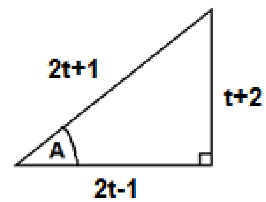
1. Desde el punto $P(1{,}6)$ se trazan dos rectas tangentes a la circunferencia $x^2+y^2+2x-19=0$. Hallar las ecuaciones generales de estas dos rectas tangentes.

Solución. La circunferencia $x^2+y^2+2x-19=0$, completando cuadrados tenemos $(x+1)^2+y^2=\sqrt{20}^2$, por tanto el centro es $C(h,k)=(-1{,}0)$ y su radio es $r=\sqrt{20}$. Ahora graficamos la circunferencia y las rectas tangentes buscadas que pasan por $P(1{,}6)$.



Las rectas tangentes buscadas tienen que pasar por $P(1{,}6)$, ahora usamos la ecuación de la recta punto – pendiente, que es $y-y_1=m(x-x_1)$ sustituyendo tenemos $y-6=m(x-1)$ que operando tenemos $mx-y+6-m=0$, ahora para hallar "m", vamos a calcular la distancia del centro $C(h,k)=(-1{,}0)$ a la recta $mx-y+6-m=0$, entonces $d=\frac{|m(-1)-1(0)+6-m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}$, esto lo igualamos al radio de la circunferencia, $\frac{|m(-1)-1(0)+6-m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{20}$ entonces $|6-2m|=\sqrt{20}\sqrt{m^2+(-1)^2}$ entonces $|6-2m|=\sqrt{20(m^2+1)}$, resolviendo esta ecuación, tenemos dos soluciones $m_1=-2,\ m_2=\frac{1}{2}$ estos valores sustituimos en $mx-y+6-m=0$, por tanto tenemos dos soluciones que son: $-2x-y+6+2=0$; $\frac{1}{2}x-y+6-\frac{1}{2}=0$, operando tenemos las soluciones que son: $2x+y-8=0\ ;\ x-2y+11=0$

2. En el siguiente triángulo, determinar $sen\ 2A + tg\ 2A$



Solución. En el triángulo por el teorema de Pitágoras $(2t+1)^2 + (t+2)^2 = (2t+1)^2$, resolviendo la ecuación $t = 2$

Por tanto:

$$sen\ 2A + tg\ 2A = 2\ sen\ A \cos A + \frac{2\ tg\ A}{1 - tg^2 A} = 2\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{2\,\frac{4}{3}}{1 - \left(\frac{4}{3}\right)^2} = -\frac{432}{175}$$

$$sen\ 2A + tg\ 2A = -\frac{432}{175}$$

3. Hallar $\sqrt[3]{x^3 + 37y}$, donde (x, y) es solución del sistema $\begin{cases} \frac{6x}{e} = 9 + \frac{log^2 y}{log^2 e} \\ 2e^x - e^{e \log y} = e^{\ln e^x} \end{cases}$

Solución. Tomamos el sistema $\begin{cases} \frac{6x}{e} = 9 + \frac{log^2 y}{log^2 e} & (1) \\ 2e^x - e^{e \log y} = e^{\ln e^x} & (2) \end{cases}$

En la ecuación (1) realizamos propiedades de logaritmo , tenemos: $\frac{6x}{e} = 9 + \frac{log^2 y}{log^2 e}$

$$\rightarrow \quad \frac{6x}{e} = 9 + (\ln y)^2 \qquad (3)$$

En la ecuación (2) realizamos propiedades de logaritmo , tenemos: $2e^x - e^{e \log y} = e^{\ln e^x} \quad \rightarrow 2e^x - e^{e \log y} = e^x$

$\rightarrow e^x = e^{e \log y} \ \rightarrow \ \ x = e \log y \ \ (4)$

Ahora remplazamos (4) en (3) y despejamos " $\ln y$" : $\frac{6e\log y}{e} = 9 + (\ln y)^2 \ \rightarrow \ 6\log y = 9 + (\ln y)^2 \ \rightarrow$

$(\ln y)^2 - 6\log y + 9 = 0 \ \rightarrow \ (\ln y - 3)^2 = 0 \ \rightarrow \ \ln y = 3 \ \rightarrow \ y = e^3$

Finalmente remplazamos en (4), $x = e\log e^3 = 3e$.

Por tanto tenemos la solución que es: $(x, y) = (3e, e^3)$, entonces $\sqrt[3]{(3e)^3 + 37e^3} = \sqrt[3]{27e^3 + 37e^3} =$

$\sqrt[3]{64e^3} = 4e$

$$\sqrt[3]{x^3 + 37y} = 4e$$

4. Demostrar la identidad: $\frac{tg^3x - 3\,tgx}{3tg^2x - 1} = tg(3x)$

Solución. Para demostrar la identidad, vamos a aplicar la identidad $tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\,tg\,\beta}$

$$tg(3x) = tg(2x + x) = \frac{tg\,2x + tg\,x}{1 - tg\,2x\,tg\,x} = \frac{tg\,(x+x) + tg\,x}{1 - tg\,(x+x)\,tg\,x} = \frac{\frac{2tgx}{1 - tg^2x} + tg\,x}{1 - \frac{2tgx}{1 - tg^2x}\,tg\,x} = \frac{tg^3x\ - 3\,tgx}{3tg^2x - 1}$$

5. Aplicando propiedades de logaritmos y exponenciales, hallar el valor reducido de la expresión

$$N = \sqrt{1 - e^{1 + \frac{1}{2}\ln 4} + 2^{2log_2 e}}$$

Solución. Tomamos:

$$N = \sqrt{1 - e^1 e^{\frac{2}{2}\ln 2} + 2^{2log_2 e}} = \sqrt{1 - e^1 e^{\ln 2} + 2^{log_2 e^2}} = \sqrt{1 - e^1 e^{\ln 2} + (e^2)^{log_2 2}}$$

$$= \sqrt{1 - 2e + e^2} = \sqrt{(e-1)^2} = e - 1$$

$$N = e - 1$$

Hugo+

Profesor Hebe Condori Cauna
Coordinador de la materia Introducción a la Matemática
Es dado en la ciudad de La Paz, en fecha 28 de noviembre de 2022, a horas 20:15