Universidad Mayor de San Andrés
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Dirección de Admisión Facultativa

INICIAL APELLIDO PATERNO

CURSO PRE-FACULTATIVO - CPFII/2024
INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA MAT - 99
SOLUCIONARIO - EXAMEN FINAL - FILA A

- Fórmulas: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, $\log_a b^n = n\log_a b$, $\operatorname{sen}(30°) = \frac{1}{2}$, $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{sen}(150°) = \frac{1}{2}$, $\cos(150°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$, $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$, $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

---

1. Resuelva la siguiente ecuación logarítmica

$$\log_x\left(\frac{8-\log_5 x}{\log_5 x}\right)^{\log_3 x} - 1 = 0, \text{ con } x \neq 1.$$

Solución: Como $1 \neq x$, entonces $3^0 \neq x \Leftrightarrow \log_3 x \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\log_x\left(\frac{8-\log_5 x}{\log_5 x}\right)^{\log_3 x} - 1 &= 0\\
\log_x\left(\frac{8-\log_5 x}{\log_5 x}\right)^{\log_3 x} &= 1\\
\{\log_3 x\}\left\{\log_x\left(\frac{8-\log_5 x}{\log_5 x}\right)\right\} &= 1 \ // \ \cdot\frac{1}{\log_3 x}\\
\log_x\left(\frac{8-\log_5 x}{\log_5 x}\right) &= \frac{1}{\log_3 x}\\
\log_x\left(\frac{8-\log_5 x}{\log_5 x}\right) &= \frac{\frac{1}{1}}{\frac{\log_x x}{\log_x 3}}\\
\log_x\left(\frac{8-\log_5 x}{\log_5 x}\right) &= \frac{\log_x 3}{\log_x x}\\
\log_x\left(\frac{8-\log_5 x}{\log_5 x}\right) &= \log_x 3,
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\frac{8-\log_5 x}{\log_5 x} &= 3\\
8-\log_5 x &= 3\log_5 x\\
8 &= 3\log_5 x + \log_5 x\\
8 &= 4\log_5 x \ // \ \cdot\frac{1}{4}\\
2 &= \log_5 x.
\end{aligned}$$

Así,

$$x = 5^2 \Leftrightarrow x = 25.$$

■

2. Demostrar la siguiente identidad trigonométrica :

$$\frac{1}{\tan\theta + \cot\theta} = \operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

<u>**Solución:**</u> Recordar: $\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

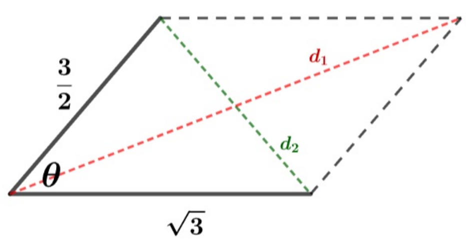
$$\frac{1}{\tan\theta + \cot\theta} = \frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}} = \frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta}} = \frac{1}{\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta}} = \operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta$$

lo que queda demostrado.

$\blacksquare$

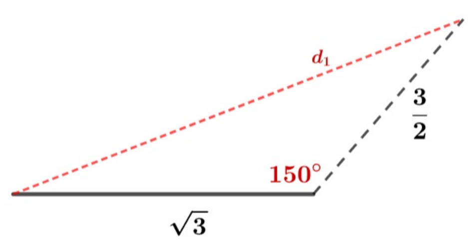
3. Considere un paralelogramo con lados que miden $\sqrt{3}$ y $\dfrac{3}{2}$, y forman un ángulo de $30°$. Determinar las medidas de las diagonales (Grafique).

<u>**Solución:**</u> Sea $\theta = 30°$. Por el Teorema del coseno, se tiene:



$$\begin{aligned} d_1^2 &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 + (\sqrt{3})^2 - 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\sqrt{3}\cos(30°) \\ &= \frac{9}{4} + 3 - 3\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{9}{4} + 3 - \frac{9}{2} \\ d_1^2 &= \frac{3}{4} \quad\Longrightarrow\quad d_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Para determinar d_2**:** Sabemos que es un paralelogramo, así uno de sus ángulos internos es $105°$. Y aplicando nuevamente el Teorema del coseno, tenemos:



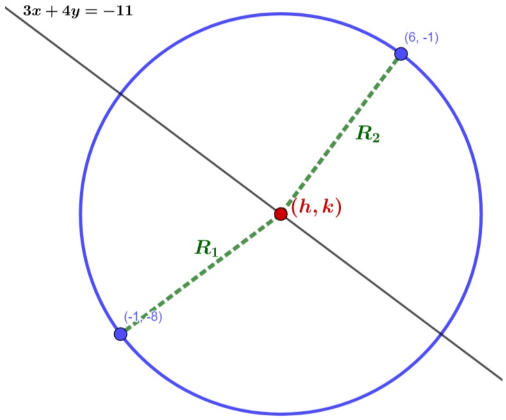
$$\begin{aligned} d_2^2 &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 + (\sqrt{3})^2 - 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\sqrt{3}\cos(150°) \\ &= \frac{9}{4} + 3 + 3\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{9}{4} + 3 + \frac{9}{2} \\ d_2^2 &= \frac{39}{4} \quad\Longrightarrow\quad d_2 = \frac{\sqrt{39}}{2} \end{aligned}$$

Luego las medidas de las diagonales son: $d_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ y $d_2 = \dfrac{\sqrt{39}}{2}$.

$\blacksquare$

4. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(6, -1)$ y $(-1, -8)$, y que tiene su centro sobre la recta $3x + 4y = -11$.

<u>**Solución:**</u> De la figura se tiene:



$$R_1^2 = R_2^2$$
$$(h-6)^2 + (k+1)^2 = (h+1)^2 + (k+8)^2$$
$$h^2 - 12h + 36 + k^2 + 2k + 1 = h^2 + 2h + 1 + k^2 + 16k + 64$$
$$-14h - 14k = 28$$
$$h + k = -2 ....(1)$$

Como el centro (h, k) esta sobre la recta $3x + 4y = -11$ entonces:

$$3h + 4k = -11 ....(2)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones: $h = 3$ y $k = -5$.

Luego el centro de la circunferencia es: $C(3, -5)$. Ahora para determinar el radio, calculamos la distancia del centro a cualquiera de los puntos

$$r = \sqrt{(3-6)^2 + (-5+1)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

Por tanto, la ecuación de la circunferencia es: $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 25$.

■

5. Hallar la ecuación de la parábola que tiene por vértice $V(2, 5)$ y foco $F(2, 9)$.

   Solución:

   Como el vértice es $V(2, 5)$ y el foco es $F(2, 9)$, entonces la parábola tiene eje vertical. Así la ecuación buscada es:

   $$(x-2)^2 = 4p(y-5)$$

   para encontrar p debemos encontrar la distancia del vértice al foco

   $$p = \sqrt{(2-2)^2 + (9-5)^2} = 4$$

   Luego la ecuación de la parábola es: $(x-2)^2 = 16(y-5)$

   y la ecuación general de la parábola es:

   $$x^2 - 4x - 16y + 84 = 0$$

■