Universidad Mayor de San Andrés
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Dirección de Admisión Facultativa

INICIAL APELLIDO PATERNO

CURSO PRE-FACULTATIVO - CPFII/2024
INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA MAT - 99
SOLUCIONARIO - EXAMEN FINAL - FILA B

- Fórmulas: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, $\log_a b^n = n\log_a b$, $\operatorname{sen}(30°) = \frac{1}{2}$, $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{sen}(150°) = \frac{1}{2}$, $\cos(150°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$, $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$, $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

1. Resuelva la siguiente ecuación logarítmica

$$\log_x\left(\frac{9-\log_4 x}{\log_4 x}\right)^{\log_2 x} - 1 = 0, \text{ con } x \neq 1.$$

<u>**Solución:**</u> Como $1 \neq x$, entonces $2^0 \neq x \Leftrightarrow \log_2 x \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\log_x\left(\frac{9-\log_4 x}{\log_4 x}\right)^{\log_2 x} - 1 &= 0\\
\log_x\left(\frac{9-\log_4 x}{\log_4 x}\right)^{\log_2 x} &= 1\\
\{\log_2 x\}\left\{\log_x\left(\frac{9-\log_4 x}{\log_4 x}\right)\right\} &= 1 \ // \ \cdot\frac{1}{\log_2 x}\\
\log_x\left(\frac{9-\log_4 x}{\log_4 x}\right) &= \frac{1}{\log_2 x}\\
\log_x\left(\frac{9-\log_4 x}{\log_4 x}\right) &= \frac{\frac{1}{1}}{\frac{\log_x x}{\log_x 2}}\\
\log_x\left(\frac{9-\log_4 x}{\log_4 x}\right) &= \frac{\log_x 2}{\log_x x}\\
\log_x\left(\frac{9-\log_4 x}{\log_4 x}\right) &= \log_x 2,
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\frac{9-\log_4 x}{\log_4 x} &= 2\\
9-\log_4 x &= 2\log_4 x\\
9 &= 2\log_4 x + \log_4 x\\
9 &= 3\log_4 x \ // \ \cdot\frac{1}{3}\\
3 &= \log_4 x.
\end{aligned}$$

Así,

$$x = 4^3 \Leftrightarrow x = 64.$$

■

2. Demostrar la siguiente identidad trigonométrica :

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta\cdot\sec\theta+\cot\theta}=\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

<u>Solución:</u> Recordar: $\operatorname{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$

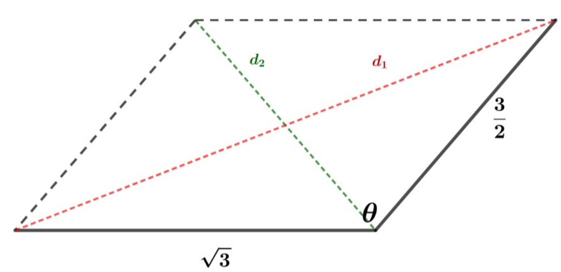
$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta\cdot\sec\theta+\cot\theta}=\frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}}=\frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta}}=\frac{1}{\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta}}=\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta$$

lo que queda demostrado.

■

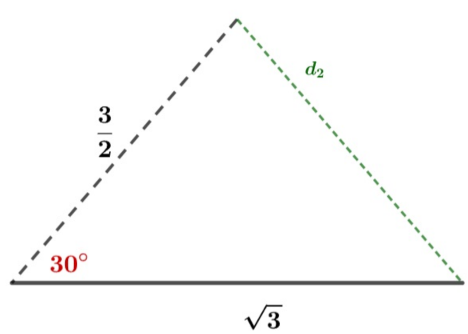
3. Considere un paralelogramo con lados que miden $\sqrt{3}$ y $\frac{3}{2}$, y forman un ángulo de 150°. Determinar las medidas de las diagonales (Grafique).

<u>Solución:</u> Sea $\theta=150°$. Por el Teorema del coseno, se tiene:



$$\begin{aligned}
d_1^2 &= \left(\frac{3}{2}\right)^2+(\sqrt{3})^2-2\cdot\frac{3}{2}\cdot\sqrt{3}\cos(150°)\\
&=\frac{9}{4}+3+3\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&=\frac{9}{4}+3+\frac{9}{2}\\
d_1^2 &=\frac{39}{4}\quad\Longrightarrow\quad d_1=\frac{\sqrt{39}}{2}
\end{aligned}$$

Para determinar d_2: Sabemos que es un paralelogramo, así uno de sus ángulos internos es 30°. Y aplicando nuevamente el Teorema del coseno, tenemos:



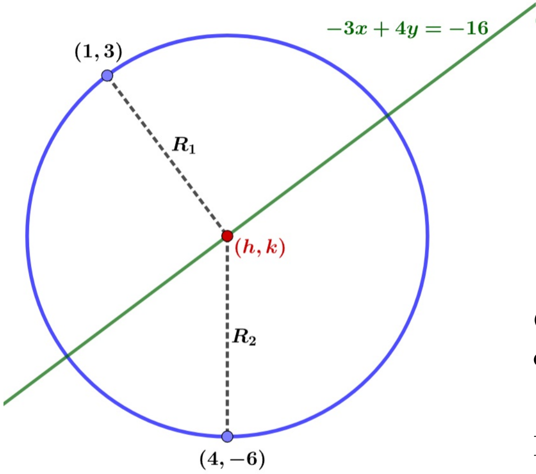
$$\begin{aligned}
d_2^2 &= \left(\frac{3}{2}\right)^2+(\sqrt{3})^2-2\cdot\frac{3}{2}\cdot\sqrt{3}\cos(30°)\\
&=\frac{9}{4}+3-3\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&=\frac{9}{4}+3-\frac{9}{2}\\
d_2^2 &=\frac{3}{4}\quad\Longrightarrow\quad d_2=\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Luego las medidas de las diagonales son: $d_1=\dfrac{\sqrt{39}}{2}$ y $d_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

■

4. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(1,3)$ y $(4,-6)$, y que tiene su centro sobre la recta $-3x+4y=-16$.

<u>Solución:</u> De la figura se tiene:



$$R_1^2 = R_2^2$$
$$(h-1)^2+(k-3)^2=(h-4)^2+(k+6)^2$$
$$h^2-2h+1+k^2-6k+9=h^2-8h+16+k^2+12k+36$$
$$6h-18k=42$$
$$h-3k=7.............(1)$$

Como el centro (h,k) esta sobre la recta $-3x+4y=-16$ entonces:

$$-3h+4k=-16..........(2)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones: $h=4$ y $k=-1$.

Luego el centro de la circunferencia es: $C(4,-1)$. Ahora para determinar el radio, calculamos la distancia del centro a cualquiera de los puntos

$$r=\sqrt{(4-1)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{9+16}=5$$

Por tanto, la ecuación de la circunferencia es: $(x-4)^2+(y+1)^2=25$.

$\blacksquare$

5. Hallar la ecuación de la parábola que tiene por vértice $V(2,5)$ y foco $F(7,5)$.

Solución:

Como el vértice es $V(2,5)$ y el foco es $F(7,5)$, entonces la parábola tiene eje horizontal. Así la ecuación buscada es:

$$(y-5)^2=4p(x-2)$$

para encontrar p debemos encontrar la distancia del vértice al foco

$$p=\sqrt{(7-2)^2+(5-5)^2}=5$$

Luego la ecuación de la parábola es: $(y-5)^2=20(x-2)$

y la ecuación general de la parábola es:

$$y^2-10y-20x+65=0$$

$\blacksquare$