22 DE JUNIO DE 2023

Parcial 3, FILA A

"MAT-99 INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA"

Apellidos	Nombres

1. Resolver los siguientes:

   a) **4 p.** Calcular la suma de los 4 primeros términos en la siguiente progresión aritmética

   $$x, x+\sqrt{x}, 2x, \ldots$$

   Solución: Por ser progresión aritmética se tiene: $x+\sqrt{x} = \dfrac{x+2x}{2}$, entonces $2x+2\sqrt{x} = 3x$, entonces $x=4$. Luego la progresión aritmética es

   $$4, 6, 8, \ldots.$$

   Finalmente $S_4 = \left[\dfrac{2\cdot 4+(4-1)\cdot 2}{2}\cdot 4\right] = 28.$.
   Otra solución es la progresión aritmética constante 0, luego la suma buscada es 0.

   b) **3 p.** El quinto y el sexto término de una progresión geométrica son $a_5 = 80$ y $a_6 = 160$. Cual es el primer término?

   Solución:
   Como los términos son consecutivos la razón esta dada por $r = \dfrac{a_6}{a_5} = \dfrac{160}{80} = 2$. Así $a_5 = a_1 \cdot r^{5-1}$, esto es $80 = a_1 \cdot 2^4$, de donde $a_1 = 5$.

2. **6 p.** Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $C=(-4,-1)$ y es tangente a la recta: $3x+2y-12=0$.

   Solución El radio r es igual a la distancia del centro $C=(-4,-1)$ a la recta : $3x+2y-12=0$.

Así,

$$\begin{aligned} r &= \frac{|3(-4)+2(-1)-12|}{\sqrt{3^2+2^2}} \\ &= \frac{|-26|}{\sqrt{13}} \\ &= \frac{2\cdot 13}{\sqrt{13}} \\ &= 2\sqrt{13}. \end{aligned}$$

Por tanto la ecuación es:

$$\begin{aligned} (x-h)^2+(y-k)^2 &= r^2 \\ (x+4)^2+(y+1)^2 &= 52. \end{aligned}$$

3. **6 p.** Determina la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto $V(-3,4)$ y su foco es el centro de la circunferencia $2x^2+2y^2+12x-4y+18=0$. Hacer un bosquejo de las graficas de la párabola y la circunferencia.

Solución: Primero determinemos el centro $C(h,k)$ de la circunferencia $2x^2+2y^2+12x-4y+18=0$, el cual es equivalente a $x^2+y^2+6x-2y+9=0$ y procedemos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} x^2+y^2+6x-2y+9 &= 0 \\ (x^2+6x)+(y^2-2y)+9 &= 0 \\ (x^2+6x+9)+(y^2-2y)+9 &= 9 \\ (x+3)^2+(y^2-2y)+9 &= 9 \\ (x+3)^2+(y^2-2y+1)+9 &= 10 \\ (x+3)^2+(y-1)^2+9 &= 10 \\ (x+3)^2+(y-1)^2 &= 1 \end{aligned}$$

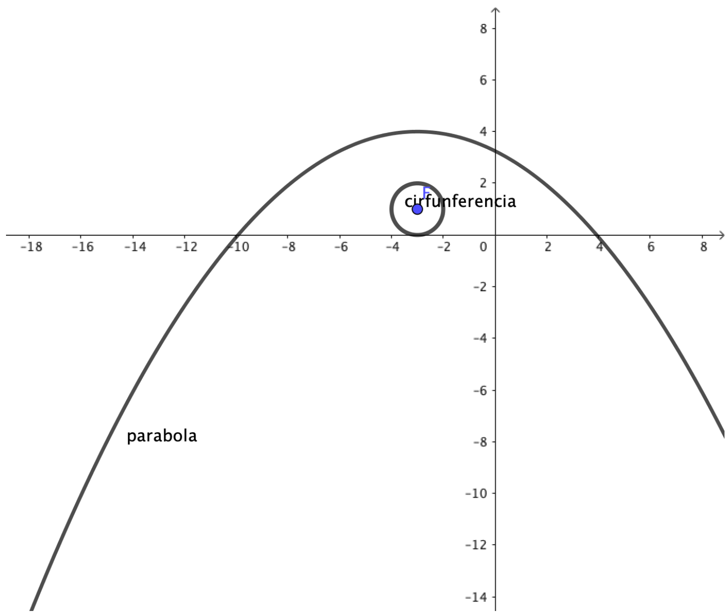
de esta forma el centro de la circunferencia es: $C(h;k)=C(-3;1)$.

Notese que la parábola buscada tiene foco $F(-3,1)$ y vértice $V(-3,4) = V(h', k')$, lo que indica que la parábola será paralela al eje Y donde su ecuación tendra la forma $(x-h')^2 = -4p(y-k')$. De acuerdo a las condiciones del problema se tiene que

$$F(-3,1) = V(-3, 4-p)$$

de donde $p = 3$. Asi la ecuación de la parabola pedida es

$$(x+3)^2 = -12(y-4).$$



4. **6 p.** Determinar los vértices, los focos y el centro de la elipse dada por la ecuación

$$4y^2 + 36x = -9x^2.$$

Solución: Ordenando convenientemente

$$9x^2 + 36x + 4y^2 = 0$$

factorizando

$$9(x^2 + 4x) + 4y^2 = 0$$

completando cuadrados

$$9(x^2 + 4x + 4) - 36 + 4y^2 = 0$$

$$9(x+2)^2 + 4y^2 = 36$$

multiplicando por $\frac{1}{36}$ en ambos miembros

$$\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \qquad\qquad \text{Elipse con eje vertical}$$

de donde $a=3$, $b=2$ y $c=\sqrt{5}$.

Por lo tanto $V_1(-2,3), V_2(-2,-3)$, $F_1(-2,\sqrt{5})$, $F_2(-2,-\sqrt{5})$ y $C(-2,0)$.