22 DE JUNIO DE 2023

Parcial 3, FILA B

"MAT-99 INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA"

Apellidos	Nombres

1. Resolver los siguientes:

   a) **4 p.** Calcular la suma de los 4 primeros términos en la siguiente progresión aritmética

   $$a, a+\sqrt{a}, 2a, \ldots$$

   Solución: Por ser progresión aritmética se tiene: $a+\sqrt{a}=\dfrac{a+2a}{2}$, entonces $2a+2\sqrt{a}=3x$, entonces $a=4$. Luego la progresión aritmética es

   $$4, 6, 8 \ldots.$$

   Finalmente $S_4=\left[\dfrac{2\cdot 4+(4-1)\cdot 2}{2}\cdot 4\right]=28.$

   Otra solución es la progresión aritmética constante 0, luego la suma buscada es 0.

   b) **3 p.** El sexto y séptimo término de una progresión geométrica son $a_6=160$ y $a_7=320$. Cual es el primer término?

   Solución:

   Como los términos son consecutivos la razón esta dada por $r=\dfrac{a_7}{a_6}=\dfrac{320}{160}=2.$ Así $a_6=a_1\cdot r^{6-1}$, esto es $160=a_1\cdot 2^5$, de donde $a_1=5$.

2. **6 p.** Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $C=(2,0)$ y es tangente a la recta: $x-y+4=0$.

   Solución El radio r es igual a la distancia del centro $C=(2,0)$ a la recta : $x-y+4=0$.

Así,

$$\begin{aligned} r &= \frac{|2-0+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} \\ &= \frac{|6|}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2\cdot 3}{\sqrt{2}} \\ &= 3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Por tanto la ecuación es:

$$\begin{aligned} (x-h)^2+(y-k)^2 &= r^2 \\ (x-2)^2+y^2 &= 18. \end{aligned}$$

3. **6 p.** Determina la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto $V(-3,5)$ y su foco es el centro de la circunferencia $2x^2+2y^2+12x-8y+18=0$. Hacer un bosquejo de las graficas de la párabola y la circunferencia.

Solución: Primero determinemos el centro $C(h,k)$ de la circunferencia $2x^2+2y^2+12x-8y+18=0$, el cual es equivalente a $x^2+y^2+6x-4y+9=0$ y procedemos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} x^2+y^2+6x-4y+9&=0 \\ (x^2+6x)+(y^2-4y)+9&=0 \\ (x^2+6x+9)+(y^2-4y)+9&=9 \\ (x+3)^2+(y^2-4y)+9&=9 \\ (x+3)^2+(y^2-4y+4)+9&=13 \\ (x+3)^2+(y-2)^2+9&=13 \\ (x+3)^2+(y-2)^2&=4 \end{aligned}$$

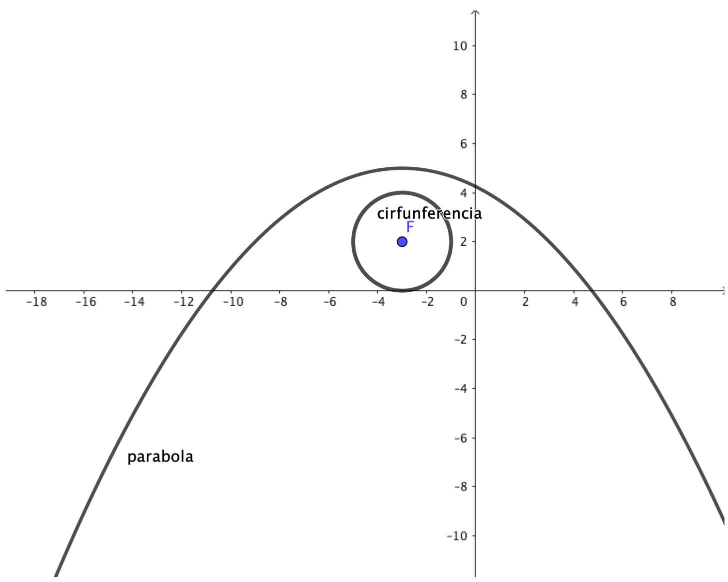
de esta forma el centro de la circunferencia es: $C(h;k)=C(-3;2)$.

Notese que la parábola buscada tiene foco $F(-3,2)$ y vértice $V(-3,5) = V(h',k')$, lo que indica que la parábola será paralela al eje Y donde su ecuación tendra la forma $(x-h')^2 = -4p(y-k')$. De acuerdo a las condiciones del problema se tiene que

$$F(-3,2) = V(-3, 5-p)$$

de donde $p = 3$. Asi la ecuación de la parábola pedida es

$$(x+3)^2 = -12(y-5).$$



4. **6 p.** Determinar los vértices, los focos y el centro de la elipse dada por la ecuación

$$9x^2 + 4y^2 = -36x.$$

Solución: Ordenando convenientemente

$$9x^2 + 36x + 4y^2 = 0$$

factorizando

$$9(x^2 + 4x) + 4y^2 = 0$$

completando cuadrados

$$9(x^2 + 4x + 4) - 36 + 4y^2 = 0$$
$$9(x+2)^2 + 4y^2 = 36$$

multiplicando por $\frac{1}{36}$ en ambos miembros

$$\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \qquad\qquad \text{Elipse con eje vertical}$$

de donde $a = 3$, $b = 2$ y $c = \sqrt{5}$.

Por lo tanto $V_1(-2, 3), V_2(-2, -3)$, $F_1(-2, \sqrt{5})$, $F_2(-2, -\sqrt{5})$ y $C(-2, 0)$.