UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS
FACULTAD DE CIENCIAS PURAS Y NATURALES
DIRECCIÓN DE ADMISIÓN FACULTATIVA

PRUEBA DE SUFICIENCIA ACADÉMICA II/2023

MAT-99 INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA

SOLUCIONES

1. (10 puntos) Cinco amigos P, Q, R, S y T se dan la mano. Tanto P como Q estrecharon la mano de uno de sus amigos solamente, mientras que R, S y T estrecharon cada uno la mano de dos. Sabemos que P estrechó la mano de T. ¿Quiénes podemos asegurar que no se dieron la mano?

   A) Q y R B) Q y S C) $\boxed{Q \text{ y } T}$ D) Ninguna.

   Solución. Si Q le hubiera dado la mano a T, entonces ni P ni Q ni T le hubieran dado la mano a nadie más, lo cual no es posible pues R le dio la mano a dos amigos. La respuesta es Q y T. ∎

2. (10 puntos) Simplificar la expresión trigonométrica

$$\frac{\cot x + \csc x}{\cos x} - \frac{1 + \sec x}{\tan x}.$$

   A) $\boxed{\tan x}$ B) $\cot x$ C) $\cos x$ D) Ninguna.

   Solución. Al usar identidades trigonométricas obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\cot x + \csc x}{\cos x} - \frac{1 + \sec x}{\tan x} &= \frac{\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\sin x}}{\cos x} - \frac{1 + \frac{1}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\frac{\cos x + 1}{\sin x}}{\cos x} - \frac{\frac{\cos x + 1}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} \\
&= \frac{\cos x + 1}{\cos x \sin x} - \frac{\cos x + 1}{\sin x} \\
&= \frac{\cos x + 1 - \cos x(\cos x + 1)}{\cos x \sin x} \\
&= \frac{\cos x + 1 - \cos^2 x - \cos x}{\cos x \sin x} \\
&= \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x \sin x} \\
&= \frac{\sin^2 x}{\cos x \sin x} \\
&= \frac{\sin x}{\cos x},
\end{aligned}$$

   así, la respuesta es $\tan x$. ∎

3. (10 puntos) ¿Cuántos números entre 10 y 300 son múltiplos de 7?

   A) 40 B) $\boxed{41}$ C) 42 D) Ninguna.

   Solución. El primer número múltiplo de 7 mayor que 10 es 14; el último múltiplo de 7 anterior a 300 es 294. Consideremos la progresión aritmética:

$$a_1 = 14,\ a_2 = 21,\ a_3 = 28,\ \cdots,\ a_n = 294,$$

   cuya razón es $d = 7$. Queremos determinar el número de elementos de la progresión. Usando la relación $a_n = a_1 + (n-1)d$ obtenemos

$$n - 1 = \frac{a_n - a_1}{d} = \frac{294 - 14}{7} = \frac{280}{7} = 40;$$

   luego, existen 41 números entre 10 y 300 que son múltiplos de 7. ∎

4. (35 puntos) Las raices x_1 y x_2 de la ecuacion

$$x^2 - 3mx + m^2 = 0$$

satisfacen la relación $x_1^2 + x_2^2 = \frac{7}{4}$, determinar el valor de $4m^2 + 1$.

A) 5 B) $\boxed{2}$ C) 7 D) Ninguna.

Solución. Si x_1 y x_2 denotan las raices de la ecuación $x^2 - 3mx + m^2 = 0$, se tiene que $x_1 + x_2 = 3m$ y $x_1 x_2 = m^2$. De un cálculo directo tenemos

$$9m^2 = (x_1 + x_2)^2 = \left(x_1^2 + x_2^2\right) + 2x_1x_2 = \frac{7}{4} + 2m^2;$$

se sigue que

$$7m^2 = \frac{7}{4}$$

y por tanto, $4m^2 = 1$. Así, la expresión buscada es 2. ■

5. (35 puntos) Determine el producto de las raíces de la ecuación logarítmica

$$\frac{1}{2}\log_{x/\sqrt{a}} x + 3\log_{xa^2} x = 2.$$

A) $a^{\frac{3}{4}}$ B) $a^{\frac{5}{4}}$ C) $a^{\frac{7}{4}}$ D) $\boxed{\text{Ninguna.}}$

Solución. Al multiplicar por 2 ambos lados de la igualdad y realizar un cambio de base tenemos

$$\begin{aligned} 4 = \frac{\log_x x}{\log_x(x/\sqrt{a})} + 6\frac{\log_x x}{\log_x(xa^2)} &= \frac{1}{\log_x + \log_x a^{-1/2}} + 6\frac{1}{\log_x x + \log_x a^2} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\log_x a} + 6\frac{1}{1 + 2\log_x a}; \end{aligned}$$

considere ahora el cambio de variable $u = \log_x a$, conseguimos la ecuación

$$4 = \frac{2}{2-u} + \frac{6}{1+2u}$$

que es equivalente a la ecuación cuadrática $4u^2 - 7u + 3 = 0$ cuyas soluciones son $u = 3/4$ o $u = 1$; así, $\log_x a = 3/4$ o $\log_x a = 1$, luego $x = a^{4/3}$ o $x = a$ son las raíces de la ecuación original, su producto es $x_1x_2 = a^{7/3}$. ■