UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS
FACULTAD DE CIENCIAS PURAS Y NATURALES
DIRECCIÓN DE ADMISIÓN FACULTATIVA

PRUEBA DE SUFICIENCIA ACADÉMICA I/2023

MAT-99 INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA

SOLUCIONES

1. (10 pts) Determine la suma de todas las raíces reales del polinomio

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$$

(a) $\boxed{10}$ (b) (c) (d) Ninguna.

Solución. Para hallar los ceros del polinomio, usamos la regla de Ruffini:

	1	-10	35	-50	24
1		1	-9	26	-24
	1	-9	26	-24	$\boxed{0}$
2		2	-14	24	
	1	-7	12	$\boxed{0}$	
3		3	-12		
	1	-4	$\boxed{0}$		
4		4			
	1	$\boxed{0}$			

Así, los ceros del polinomio son $1, 2, 3$ y 4, su suma es 10. ■

2. (15 pts) Determine el valor de la constante n de modo que la ecuación cadrática

$$x^2 + n^2 = (2n+1)x + 1$$

posea una única raíz.

(a) (b) (c) $\boxed{-5/4}$ (d) Ninguna.

Solución. La ecuación puede ser escrita como $x^2 - (2n+1)x + (n^2 - 1) = 0$. Esta ecuación tiene una única raíz si $(2n+1)^2 - 4(n^2-1) = 0$; resolviendo esta ecuación encontramos que $4n + 1 + 4 = 0$, así $n = -5/4$. ■

3. (15 pts) Simplifique la expresión

$$\frac{\tan x + \sec x}{\sin x} - \frac{1 + \csc x}{\cot x}.$$

(a) (b) $\boxed{\cot x}$ (c) (d) Ninguna.

Solución. Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{\tan x + \sec x}{\sin x} - \frac{1 + \csc x}{\cot x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x}}{\sin x} - \frac{1 + \frac{1}{\sin x}}{\frac{\cos x}{\sin x}} &= \frac{\sin x + 1}{\sin x \cos x} - \frac{\sin x + 1}{\cos x} \\
&= \frac{\sin x + 1}{\sin x \cos x} - \frac{(\sin x + 1)\sin x}{\sin x \cos x} \\
&= \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x \cos x} \\
&= \frac{\cos^2 x}{\sin x \cos x} = \cot x. \quad ■
\end{aligned}$$

4. (30 pts) Determine el producto de todas las raíces de la ecuación logarítmica

$$2\log(\log x) + \log 3 = \log(5\log x - 2).$$

(a) $\boxed{10^{5/3}}$ (b) (c) (d) Ninguna.

Solución. Escribiendo $v = \log x$, tenemos la ecuación $2\log v + \log 3 = \log(5v - 2)$, se sigue que $3v^2 = 5v - 2$, esta ecuación tiene soluciones $v = 1$ o $v = 2/3$. Así, $x = 10$ o $x = 10^{2/3}$; su producto es $10^{5/3}$. ■

5. (30 pts) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 = 4x + 1$ que sea paralela a la recta $x + y - 2 = 0$.

(a) (b) (c) $\boxed{4x + 4y = -5}$ (d) Ninguna.

Solución. Suponga que la ec. de la recta es $y = mx + b$; ya que es paralela a $x + y - 2 = 0$, se tiene $m = -1$. El valor de b se encuentra de modo que la intersección de la parábola $y^2 = 4x + 1$ con la recta $y = -x + b$ sea un sólo punto, es decir

$$\begin{aligned} y^2 &= 4x + 1 \\ (-x + b)^2 &= 4x + 1 \\ x^2 - 2xb + b^2 &= 4x + 1 \\ x^2 - (2b + 4)x + (b^2 - 1) &= 0, \end{aligned}$$

esta última ecuación tiene una sóla solución si $(2b + 4)^2 - 4(b^2 - 1) = 0$, así $b = -5/4$. La ecuación de la recta es $4y = -4x - 5$. ■