Universidad Mayor de San Andrés
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Dirección de Admisión Facultativa

CURSO PRE-FACULTATIVO - CPF II/2025
INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA MAT - 99
EXAMEN FINAL - FILA B

Soluciones

1. Hallar el o los valores de k para que la distancia del punto $P(k,3)$ a la recta $4x-3y+1=0$ sea 4

   Solución:

   Estamos buscando el valor de k. Haciendo uso de la fórmula de la distancia de un punto a una recta:

$$\begin{aligned} D &= \frac{|4x_1-3y_1+1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} \quad \text{con} \quad x_1=k, y_1=3 \\ 4 &= \frac{|4k-3(3)+1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} \end{aligned}$$

   operando tenemos

$$\begin{aligned} 20 &= |4k-8| \\ 20 &= 4|k-2| \\ 25 &= (k-2)^2 \\ k^2-4k-21 &= 0 \\ (k-7)(k+3) &= 0 \quad \to \quad k=7 \quad \text{o} \quad k=-3 \end{aligned}$$

   así entonces existen dos soluciones:

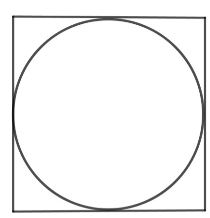
$$P(7,3) \quad \text{y} \quad P(-3,3)$$

   tal que la distancia de estos puntos a la recta es 4.

■

2. Hallar el área del cuadrado en el cual está inscrito la circunferencia que pasa por los puntos $A(0,3)$ y $B(6,3)$ y tiene su centro sobre la recta $y-2x+4=0$

   Solución: Sea (h,k) el centro de la circunferencia que pasa por la recta $y-2x+4=0$.
   Por los datos del problema, tenemos el siguiente sistema de tres ecuaciones:



$$\begin{aligned} (0-h)^2+(3-k)^2 &= r^2 \\ (6-h)^2+(3-k)^2 &= r^2 \\ k-2h+4 &= 0 \end{aligned}$$

   Resolviendo el sistema de ecuaciones tenemos: $h=3$, $k=2$, $r=\sqrt{10}$
   Por tanto el área del cuadrado es $A=(2r)(2r)=4r^2=4\cdot 10=40[\mathrm{u}^2]$

■

3. En el siguiente problema reemplaze m por su mes de nacimiento [$m=1=$ Enero, $m=2=$ Febrero, $m=3=$ Marzo, $m=4=$ Abril, $m=5=$ Mayo, $m=6=$ Junio, $m=7=$ Julio, $m=8=$ Agosto, $m=9=$ Septiembre, $m=10=$ Octubre, $m=11=$ Noviembre, $m=12=$ Diciembre]. Considere la parábola y la circunferencia:

$$y=(x-m)^2 \quad \text{y} \quad (x-m)^2+(y-k)^2=k^2,$$

   donde k es igual a m^2+1. Calcule los puntos de intersección reales entre las figuras geométricas.
   Solución: Sustituya la ecuación de la parábola $y=(x-m)^2$ en la ecuación de la circunferencia:

$$(x-m)^2+\left((x-m)^2-k\right)^2=k^2$$

Sea $u = (x-m)^2$:

$$\begin{aligned}
& u + (u-k)^2 = k^2 \\
\Leftrightarrow\ & u + u^2 - 2uk + \cancel{k^2} = \cancel{k^2} \\
\Leftrightarrow\ & u^2 - 2uk + u = 0 \\
\Leftrightarrow\ & u(u - 2k + 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & u = 0 \quad \text{o} \quad u - 2k + 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x-m)^2 = 0 \quad \text{o} \quad u = 2k - 1 \\
\Leftrightarrow\ & x - m = 0 \quad \text{o} \quad (x-m)^2 = 2(m^2+1) - 1 \\
\Leftrightarrow\ & x = m \quad \text{o} \quad (x-m)^2 = 2m^2 + 1 \\
\Leftrightarrow\ & x - m = \pm\sqrt{2m^2+1} \\
\Leftrightarrow\ & x = m \pm \sqrt{2m^2+1}.
\end{aligned}$$

Los puntos de intersección reales entre la parábola y la circunferencia son los 3 puntos (x, y):

- Si $x = m$: $y = (x-m)^2 = (m-m)^2 = 0$, entonces

$$\boxed{(x, y) = (m, 0)}$$

- Si $x = m - \sqrt{2m^2+1}$: $y = (x-m)^2 = \left((m - \sqrt{2m^2+1}) - m\right)^2 = \left(\cancel{m} - \sqrt{2m^2+1} - \cancel{m}\right)^2 = 2m^2 + 1$, entonces

$$\boxed{(x, y) = \left(m - \sqrt{2m^2+1}, 2m^2+1\right)}$$

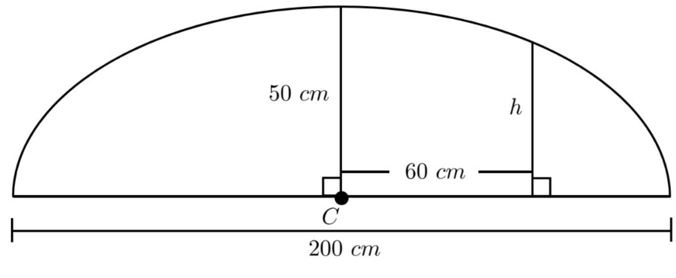
- Si $x = m + \sqrt{2m^2+1}$: $y = (x-m)^2 = \left((m + \sqrt{2m^2+1}) - m\right)^2 = \left(\cancel{m} + \sqrt{2m^2+1} - \cancel{m}\right)^2 = 2m^2 + 1$, entonces

$$\boxed{(x, y) = \left(m + \sqrt{2m^2+1}, 2m^2+1\right)}$$

Mes$= m$	**Ternas Soluciones Reales**
1	$(1,0)$, $(1-\sqrt{3}, 3)$, $(1+\sqrt{3}, 3)$
2	$(2,0)$, $(-1, 9)$, $(5, 9)$
3	$(3,0)$, $(3-\sqrt{19}, 19)$, $(3+\sqrt{19}, 19)$
4	$(4,0)$, $(4-\sqrt{33}, 33)$, $(4+\sqrt{33}, 33)$
5	$(5,0)$, $(5-\sqrt{51}, 51)$, $(5+\sqrt{51}, 51)$
6	$(6,0)$, $(6-\sqrt{73}, 73)$, $(6+\sqrt{73}, 73)$
7	$(7,0)$, $(7-\sqrt{99}, 99)$, $(7+\sqrt{99}, 99)$
8	$(8,0)$, $(8-\sqrt{129}, 129)$, $(8+\sqrt{129}, 129)$
9	$(9,0)$, $(9-\sqrt{163}, 163)$, $(9+\sqrt{163}, 163)$
10	$(10,0)$, $(10-\sqrt{201}, 201)$, $(10+\sqrt{201}, 201)$
11	$(11,0)$, $(11-\sqrt{243}, 243)$, $(11+\sqrt{243}, 243)$
12	$(12,0)$, $(-5, 289)$, $(29, 289)$

$\blacksquare$

4. La siguiente figura representa la mitad superior de una elipse con centro C.



Hallar la altura h que está a 60 cm del centro C de la elipse.

Solución:

Del gráfico $a = 100$ y $b = 50$,

$$\frac{x^2}{100^2} + \frac{y^2}{50^2} = 1 \quad (1)$$

además $x = 60$, $y = h$, reemplazando en (1)

$$\frac{60^2}{100^2} + \frac{h^2}{50^2} = 1$$

resolviendo la ecuación, se obtiene $h = 40$ cm.

5. Una hipérbola tiene su centro en (-2,1) y el eje que contiene los vértices es paralelo al eje x. Hallar y graficar la ecuación de la hipérbola, sus asíntotas, focos y vértices sabiendo que su excentricidad es $\frac{5}{3}$ y que pasa por el punto (1,1).

<u>**Solución:**</u> 1) Ecuación general:

$$\frac{(x+2)^2}{a^2} - \frac{(y-1)^2}{b^2} = 1$$

2) Excentricidad:

$$e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}$$
$$\frac{25}{9} = 1 + \frac{b^2}{a^2}$$
$$b^2 = \frac{16}{9}a^2$$

3) Evaluando en el Punto (1,1):

$$\frac{(1+2)^2}{a^2} - \frac{(1-1)^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{9}{a^2} - 0 = 1$$
$$a^2 = 9$$
$$b^2 = \frac{16}{9} \cdot 9 = 16$$

4) Ecuación de la hipérbola:

$$16\,(x+2)^2 - 9\,(y-1)^2 = 144$$
$$16\left(x^2+4x+4\right) - 9\left(y^2-2y+1\right) = 144$$
$$\boxed{16x^2 + 64x - 9y^2 + 18y - 89 = 0}$$

5) Asíntotas:

$$y - 1 = \pm\frac{b}{a}(x+2)$$

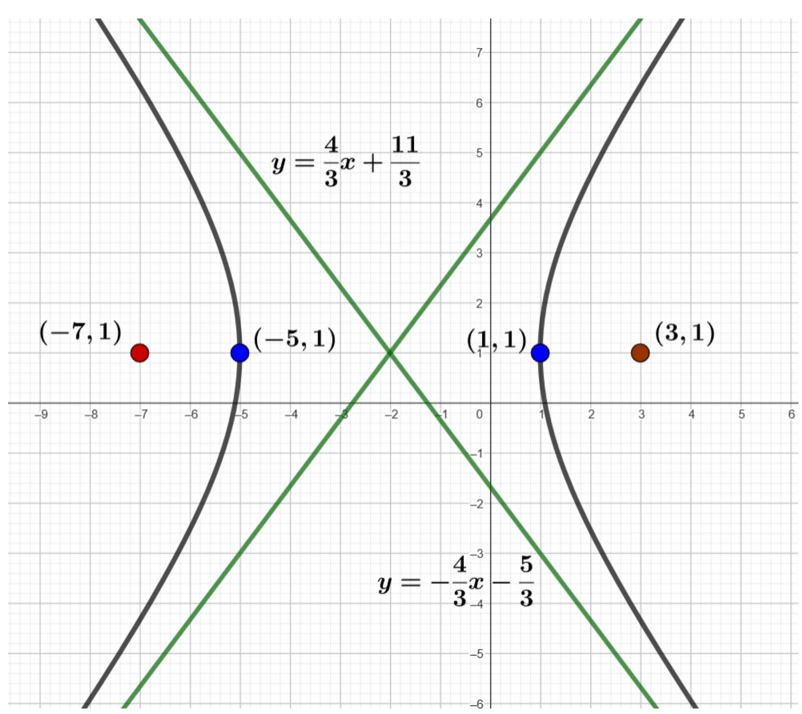
$$y = \frac{4}{3}x + \frac{11}{3}$$
$$y = -\frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$$

6) Vértices:

$$(-2 \pm a, 1) \quad \Longrightarrow \quad (1,1) \quad \text{y}\,(-5,1)$$

7) Focos

$$c = e \cdot a \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{5}{3} \cdot 3 = 5 \quad \Longrightarrow \quad (-2 \pm c, 1) \quad \Longrightarrow \quad (3,1) \quad \text{y} \quad (-7,1)$$



Universidad Mayor de San Andrés
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Dirección de Admisión Facultativa

CURSO PRE-FACULTATIVO - CPF II/2025
INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA MAT - 99
EXAMEN FINAL - FILA A

Soluciones

1. Hallar el o los valores de h para que la distancia del punto $P(4,h)$ a la recta $3x-4y-4=0$ sea 4.

   Solución:

   Estamos buscando el valor de h. Haciendo uso de la fórmula de la distancia de un punto a una recta:

$$D = \frac{|3x_1 - 4y_1 - 4|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} \quad \text{con} \quad x_1 = 4, y_1 = h$$
$$4 = \frac{|3(4) - 4h - 4|}{5}$$

   operando tenemos

$$\begin{aligned} 20 &= |8-4h| \\ 20 &= 4|2-h| \\ 25 &= (2-h)^2 \\ h^2 &- 4h - 21 = 0 \\ (h-7)&(h+3) = 0 \quad \to \quad h = 7 \quad \text{o} \quad h = -3 \end{aligned}$$

   así entonces existen dos soluciones:

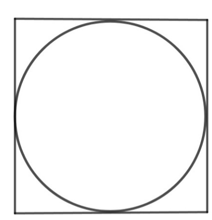
$$P(4,7) \quad \text{y} \quad P(4,-3)$$

   Talque la distancia de estos puntos a la recta es 4.

■

2. Hallar el área del cuadrado en el cual está inscrito la circunferencia que pasa por los puntos $A(8,4)$ y $B(0,4)$ y tiene su centro sobre la recta $y-x+3=0$.

   Solución: Sea (h,k) el centro de la circunferencia que pasa por la recta $y-x+3=0$.
   Por los datos del problema, tenemos el siguiente sistema de tres ecuaciones:



$$\begin{aligned} (0-h)^2 + (4-k)^2 &= r^2 \\ (8-h)^2 + (4-k)^2 &= r^2 \\ k - h + 3 &= 0 \end{aligned}$$

   Resolviendo el sistema de ecuaciones tenemos: $h=4$, $k=1$, $r=5$
   Por tanto el área del cuadrado es $A=(2r)(2r)=4r^2=4\cdot 25=100[\text{u}^2]$

■

3. En el siguiente problema reemplaze m por su mes de nacimiento [$m=1=$ Enero, $m=2=$ Febrero, $m=3=$ Marzo, $m=4=$ Abril, $m=5=$ Mayo, $m=6=$ Junio, $m=7=$ Julio, $m=8=$ Agosto, $m=9=$ Septiembre, $m=10=$ Octubre, $m=11=$ Noviembre, $m=12=$ Diciembre]. Considere la parábola y la circunferencia:

$$y=(x-m)^2 \quad \text{y} \quad (x-m)^2+(y-k)^2=k^2,$$

   donde k es igual a m^2+1. Calcule los puntos de intersección reales entre las figuras geométricas.
   Solución: Sustituya la ecuación de la parábola $y=(x-m)^2$ en la ecuación de la circunferencia:

$$(x-m)^2 + \left((x-m)^2 - k\right)^2 = k^2$$

Sea $u=(x-m)^2$:

$$
\begin{array}{rrcl}
 & u+(u-k)^2=k^2 & & \\
\Leftrightarrow & u+u^2-2uk+\cancel{k^2}=\cancel{k^2} & & \\
\Leftrightarrow & u^2-2uk+u=0 & & \\
\Leftrightarrow & u(u-2k+1)=0 & & \\
\Leftrightarrow & u=0 & \text{o} & u-2k+1=0 \\
\Leftrightarrow & (x-m)^2=0 & \text{o} & u=2k-1 \\
\Leftrightarrow & x-m=0 & \text{o} & (x-m)^2=2(m^2+1)-1 \\
\Leftrightarrow & x=m & \text{o} & (x-m)^2=2m^2+1 \\
\Leftrightarrow & & & x-m=\pm\sqrt{2m^2+1} \\
\Leftrightarrow & & & x=m\pm\sqrt{2m^2+1}.
\end{array}
$$

Los puntos de intersección reales entre la parábola y la circunferencia son los 3 puntos (x,y):
• Si $x=m$: $y=(x-m)^2=(m-m)^2=0$, entonces

$$\boxed{(x,y)=(m,0)}$$

• Si $x=m-\sqrt{2m^2+1}$: $y=(x-m)^2=\left((m-\sqrt{2m^2+1})-m\right)^2=\left(\cancel{m}-\sqrt{2m^2+1}-\cancel{m}\right)^2$ $=2m^2+1$, entonces

$$\boxed{(x,y)=\left(m-\sqrt{2m^2+1},2m^2+1\right)}$$

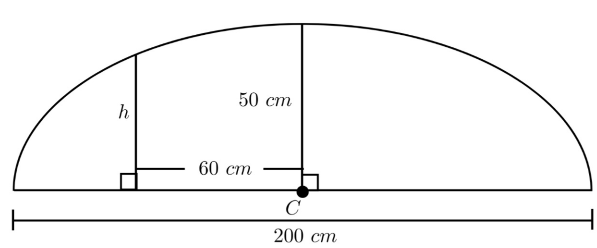
• Si $x=m+\sqrt{2m^2+1}$: $y=(x-m)^2=\left((m+\sqrt{2m^2+1})-m\right)^2=\left(\cancel{m}+\sqrt{2m^2+1}-\cancel{m}\right)^2$ $=2m^2+1$, entonces

$$\boxed{(x,y)=\left(m+\sqrt{2m^2+1},2m^2+1\right)}$$

Mes$=m$	**Ternas Soluciones Reales**		
1	$(1,0)$,	$(1-\sqrt{3},3)$,	$(1+\sqrt{3},3)$
2	$(2,0)$,	$(-1,9)$,	$(5,9)$
3	$(3,0)$,	$(3-\sqrt{19},19)$,	$(3+\sqrt{19},19)$
4	$(4,0)$,	$(4-\sqrt{33},33)$,	$(4+\sqrt{33},33)$
5	$(5,0)$,	$(5-\sqrt{51},51)$,	$(5+\sqrt{51},51)$
6	$(6,0)$,	$(6-\sqrt{73},73)$,	$(6+\sqrt{73},73)$
7	$(7,0)$,	$(7-\sqrt{99},99)$,	$(7+\sqrt{99},99)$
8	$(8,0)$,	$(8-\sqrt{129},129)$,	$(8+\sqrt{129},129)$
9	$(9,0)$,	$(9-\sqrt{163},163)$,	$(9+\sqrt{163},163)$
10	$(10,0)$,	$(10-\sqrt{201},201)$,	$(10+\sqrt{201},201)$
11	$(11,0)$,	$(11-\sqrt{243},243)$,	$(11+\sqrt{243},243)$
12	$(12,0)$,	$(-5,289)$,	$(29,289)$

■

4. La siguiente figura representa la mitad superior de una elipse con centro C.



Hallar la altura h que está a 60 cm del centro C de la elipse.

Solución: Del gráfico $a=100$ y $b=50$,

$$\frac{x^2}{100^2}+\frac{y^2}{50^2}=1 \quad (1)$$

además $x=-60$, $y=h$, reemplazando en (1)

$$\frac{(-60)^2}{100^2}+\frac{h^2}{50^2}=1$$

resolviendo la ecuación, se obtiene $h=40$ cm.

■

5. Una hipérbola tiene su centro en (-2,1) y sus vértices se encuentran sobre una recta paralela al eje y. Hallar y graficar la ecuación de la hipérbola, sus asíntotas, focos y vértices sabiendo que su excentricidad es $\frac{5}{3}$ y que pasa por el punto (-2,4).

Solución: 1) Ecuación general:

$$\frac{(y-1)^2}{a^2} - \frac{(x+2)^2}{b^2} = 1$$

2) Excentricidad:

$$e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}$$
$$\frac{25}{9} = 1 + \frac{b^2}{a^2}$$
$$b^2 = \frac{16}{9}a^2$$

3) Evaluando en el Punto (-2,4):

$$\frac{(4-1)^2}{a^2} - \frac{(-2+2)^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{9}{a^2} - 0 = 1$$
$$a^2 = 9$$
$$b^2 = \frac{16}{9} \cdot 9 = 16$$

4) Ecuación de la hipérbola:

$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{16} = 1$$
$$\boxed{16y^2 - 36x - 9x^2 - 32y - 164 = 0}$$

5) Asíntotas:

$$y - 1 = \pm\frac{a}{b}(x+2)$$

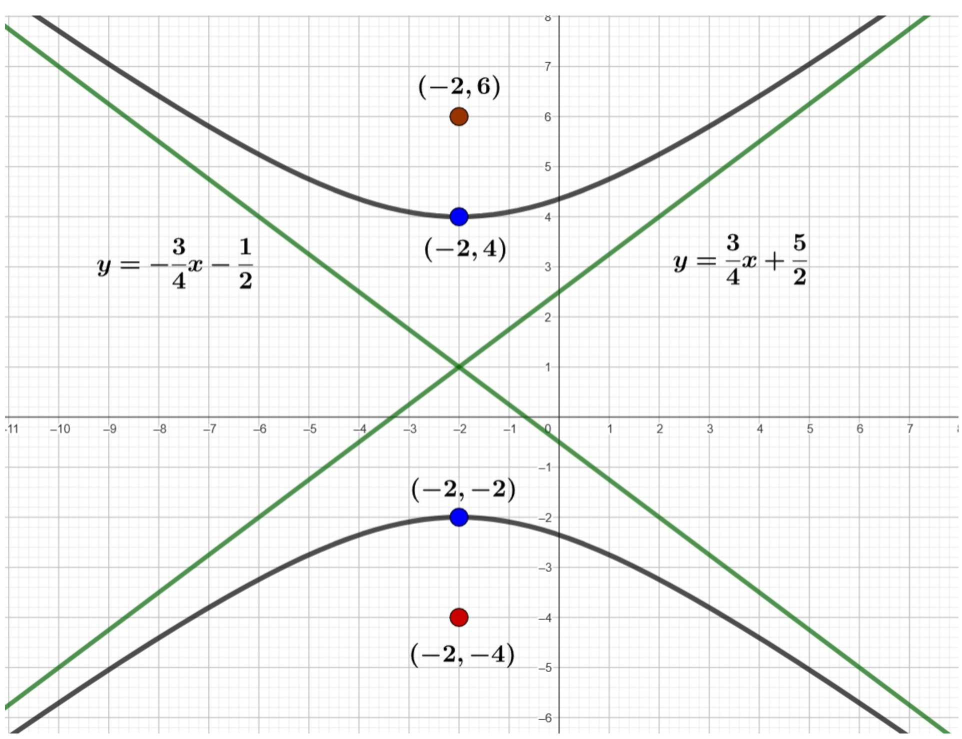
$$y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$$
$$y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$$

6) Vértices:

$$(-2,4) \quad \text{y}\,(-2,-2)$$

7) Focos:

$$(-2,-4) \quad \text{y} \quad (-2,6)$$



■