Universidad Mayor de San Andrés
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Dirección de Admisión Facultativa

CURSO PRE-FACULTATIVO - CPF II/2025
INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA MAT - 99
1er EXAMEN PARCIAL

Soluciones

1. Simplifica la siguiente expresión algebraica:

$$E=\frac{\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2ab\sqrt{a}}\right)^{-1}+\left(\dfrac{2ab\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)}{\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^{2}-\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2}\right)^{2}}$$

Solución: Por propiedades de exponentes la expresión es equivalente a:

$$E==\frac{\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2ab\sqrt{a}}\right)^{-1}+\left(\dfrac{2ab\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)}{\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^{2}-\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2}\right)^{2}}=\frac{\left(\dfrac{2ab\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)+\left(\dfrac{2ab\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)}{\left(\dfrac{a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b}{4}\right)-\left(\dfrac{a-2\sqrt{a}\sqrt{b}+b}{4}\right)}$$

$$=\frac{\dfrac{2ab\sqrt{a}+2ab\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}{\dfrac{a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b-(a-2\sqrt{a}\sqrt{b}+b)}{4}}=\frac{\dfrac{2ab(\cancel{\sqrt{a}+\sqrt{b}})}{\cancel{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}}{\dfrac{\cancel{4}\sqrt{a}\sqrt{b}}{\cancel{4}}}=\frac{2ab}{\sqrt{ab}}=2\sqrt{ab}$$

Luego $E=2\sqrt{ab}$

$\blacksquare$

2. Factorizar la siguiente expresión algebraica:

$$A=a^2-10ab+ac+25b^2-5bc-6c^2$$

Solución: Ordenamos la expresión y recordando que $(u-v)^2=u^2-2uv+v^2$,

$$A=\left(a^2-10ab+25b^2\right)+ac-5bc-6c^2$$
$$A=(a-5b)^2+ac-5bc-6c^2$$

Factorizamos c

$$A=(a-5b)^2+c\,(a-5b)-6c^2$$

Realizamos un cambio de variable: $x=(a-5b)$

$$A=(x)^2+c\,(x)-6c^2$$

Aplicamos la regla de Ruffini

$$
\begin{array}{r|rrr}
 & 1 & c & -6c^2 \\
2c & & 2c & 6c^2 \\
\hline
 & 1 & 3c & 0
\end{array}
$$

$$A = (x-2c)\cdot(x+3c)$$

Sustituimos la variable $x = (a-5b)$ y obtenemos la solución

$$A = (a-5b-2c)\cdot(a-5b+3c)\,.$$

■

3. Hallar el o los valores de k para que al dividir $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + (3k)x + k^2$ entre $(x-3)$, tenga residuo 13.

   Solución: Sea $P(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 3kx + k^2$. Por el teorema del resto, se cumple $P(3) = R$, donde R es el resto de la división.

   Como $R = 13$, entonces

$$
\begin{aligned}
P(3) &= 13 \\
3^4 - 4(3)^3 + 2(3)^2 + 3k(3) + k^2 &= 13 \\
k^2 + 9k - 22 &= 0 \\
(k+11)(k-2) &= 0 \quad\Longrightarrow\quad k=-11 \quad \text{o} \quad k=2.
\end{aligned}
$$

   Por tanto los valores de k son: $k=-11$ ó $k=2$.

■

4. Si $abc \neq 0$, resolver:

$$\frac{x-a}{bc} + \frac{x-b}{ac} + \frac{x-c}{ab} = \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c}$$

   Solución: Iniciemos sumando estas fracciones

$$
\begin{aligned}
\frac{x-a}{bc} + \frac{x-b}{ac} + \frac{x-c}{ab} &= \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} \\
\frac{a(x-a) + b(x-b) + c(x-c)}{abc} &= \frac{2bc + 2ac + 2ab}{abc} \\
\frac{ax - a^2 + bx - b^2 + cx - c^2}{abc} &= \frac{2(bc+ac+ab)}{abc} \\
\frac{(ax+bx+cx) - a^2 - b^2 - c^2}{abc} &= \frac{2(bc+ac+ab)}{abc} \\
\frac{(a+b+c)\,x - a^2 - b^2 - c^2}{abc} &= \frac{2(bc+ac+ab)}{abc} \\
(a+b+c)\,x - a^2 - b^2 - c^2 &= \frac{2(bc+ac+ab)}{\cancel{abc}}\cdot\cancel{abc}, \qquad \text{pues } abc \neq 0 \\
(a+b+c)\,x - a^2 - b^2 - c^2 &= 2\,(ab+ac+bc) \\
(a+b+c)\,x &= a^2 + b^2 + c^2 + 2\,(ab+ac+bc) \\
\cancel{(a+b+c)}x &= (a+b+c)^{\cancel{2}} \\
x &= a+b+c
\end{aligned}
$$

■

5. Si los cuadrados de las raices reales de la ecuación $x^2+x+m=0$ suman 9, entonces hallar el valor de m.

<u>Solución:</u> Sean x_1 y x_2 soluciones de la ecuación cuadrática: $x^2+x+m=0$, las cuales cumplen

$$x_1^2+x_2^2=9 \qquad (1)$$

Por otro lado, por la relación de raíces y coeficientes de una ecuación cuadrática se verifica:

$$x_1+x_2=-1 \qquad (2)$$
$$x_1 \cdot x_2=m \qquad (3)$$

Elevando al cuadrado los miembros de la ecuación (2):

$$(x_1+x_2)^2=(-1)^2$$
$$\underbrace{x_1^2+x_2^2}_{9}+2\underbrace{x_1x_2}_{m}=1$$
$$9+2m=1 \qquad \text{(por las ecuaciones (1) y (3))}$$

Finalmente $m=-4$

■

Universidad Mayor de San Andrés
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Dirección de Admisión Facultativa

CURSO PRE-FACULTATIVO - CPF II/2025
INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA MAT - 99
1er EXAMEN PARCIAL

Soluciones

1. Simplifica la siguiente expresión algebraica:

$$E = \frac{\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2xy\sqrt{x}}\right)^{-1} - \left(\dfrac{2xy\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)}$$

Solución: Por propiedades de exponentes la expresión es equivalente a:

$$E = \frac{\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2xy\sqrt{x}}\right)^{-1} - \left(\dfrac{2xy\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)} = \frac{\left(\dfrac{x-2\sqrt{x}\sqrt{y}+y}{4}\right) - \left(\dfrac{x+2\sqrt{x}\sqrt{y}+y}{4}\right)}{\left(\dfrac{2xy\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right) - \left(\dfrac{2xy\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)}$$

$$= \frac{\dfrac{x-2\sqrt{x}\sqrt{y}+y-(x+2\sqrt{x}\sqrt{y}+y)}{4}}{\dfrac{2xy\sqrt{x}-2xy\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}} = \frac{-\dfrac{\cancel{4}\sqrt{x}\sqrt{y}}{\cancel{4}}}{\dfrac{2xy\cancel{(\sqrt{x}-\sqrt{y})}}{\cancel{\sqrt{x}-\sqrt{y}}}} = \frac{-\sqrt{xy}}{2xy} = -\frac{1}{2\sqrt{xy}}$$

Luego $E = -\dfrac{1}{2\sqrt{xy}}$

$\blacksquare$

2. Factorizar la siguiente expresión algebraica:

$$A = 16a^2 - 8ab + 4ac + b^2 - bc - 12c^2$$

Solución: Ordenamos la expresión y recordando que $(u-v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$,

$$A = \left(16a^2 - 8ab + b^2\right) + 4ac - bc - 12c^2$$
$$A = (4a-b)^2 + 4ac - bc - 12c^2$$

Factorizamos c

$$A = (4a-b)^2 + c(4a-b) - 12c^2$$

Realizamos un cambio de variable: $x = (4a-b)$

$$A = (x)^2 + c\,(x) - 12c^2$$

Aplicamos la regla de Ruffini

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & 1 & c & -12c^2 \\
3c & & 3c & 12c^2 \\
\hline
 & 1 & 4c & 0
\end{array}
$$

$$A = (x - 3c) \cdot (x + 4c)$$

Sustituimos la variable $x = (4a - b)$ y obtenemos la solución

$$A = (4a - b - 3c) \cdot (4a - b + 4c)\,.$$

■

3. Hallar el o los valores de m para que al dividir $x^4 - 5x^3 + 3x^2 + (2m)x - m^2$ entre $(x - 2)$, tenga residuo -9.

   Solución:

   Sea $P(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + (2m)x - m^2$. Por el teorema del resto, se cumple $P(2) = R$, donde R es el resto de la división.

   Como $R = -9$, entonces

$$
\begin{aligned}
P(2) &= -9 \\
2^4 - 5(2)^3 + 3(2)^2 + 2m(2) - m^2 &= -9 \\
-m^2 + 4m - 3 &= 0 \\
(m-3)(m-1) &= 0 \quad \Longrightarrow \quad m = 3 \quad \text{o} \quad m = 1.
\end{aligned}
$$

   Por tanto los valores de k son: $m = 3$ ó $m = 1$.

■

4. Si $abc \neq 0$, resolver:

$$\frac{x-a}{2bc} + \frac{x-b}{2ac} + \frac{x-c}{2ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

   Solución: Iniciemos sumando estas fracciones

$$
\begin{aligned}
\frac{x-a}{2bc} + \frac{x-b}{2ac} + \frac{x-c}{2ab} &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \\
\frac{a(x-a) + b(x-b) + c(x-c)}{2abc} &= \frac{bc + ac + ab}{abc} \\
\frac{ax - a^2 + bx - b^2 + cx - c^2}{2abc} &= \frac{bc + ac + ab}{abc} \\
\frac{(ax + bx + cx) - a^2 - b^2 - c^2}{2abc} &= \frac{bc + ac + ab}{abc} \\
\frac{(a+b+c)\,x - a^2 - b^2 - c^2}{2abc} &= \frac{bc + ac + ab}{abc} \\
(a+b+c)\,x - a^2 - b^2 - c^2 &= \frac{bc + ac + ab}{\cancel{abc}} 2\cancel{abc}, \qquad \text{pues } abc \neq 0 \\
(a+b+c)\,x - a^2 - b^2 - c^2 &= 2\,(ab + ac + bc) \\
(a+b+c)\,x &= a^2 + b^2 + c^2 + 2\,(ab + ac + bc) \\
\cancel{(a+b+c)}x &= (a+b+c)^{\cancel{2}} \\
x &= a + b + c
\end{aligned}
$$

■

5. Si los cuadrados de las raices reales de la ecuación $x^2 + 3x + p = 0$ suman 17, entonces hallar el valor de p.

Solución: Sean x_1 y x_2 soluciones de la ecuación cuadrática: $x^2 + 3x + p = 0$, las cuales cumplen

$$x_1^2 + x_1^2 = 17 \qquad (1)$$

Por otro lado, por la relación de raíces y coeficientes de una ecuación cuadrática se verifica:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -3 \qquad (2) \\ x_1 \cdot x_2 &= p \qquad (3) \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado los miembros de la ecuación (2):

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2)^2 &= (-3)^2 \\ \underbrace{x_1^2 + x_2^2}_{17} + 2\underbrace{x_1 x_2}_{p} &= 9 \\ 17 + 2p &= 9 \qquad \text{(por las ecuaciones (1) y (3))} \end{aligned}$$

Finalmente $p = -4$

■