Universidad Mayor de San Andrés
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Dirección de Admisión Facultativa

CURSO PRE-FACULTATIVO - CPF II/2025
INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA MAT - 99
2DO EXAMEN PARCIAL - FILA A

Soluciones

1. Resolver la siguiente ecuación logarítmica:

$$\log_5\{\log_2[\log_3(x-6)]\}=0$$

Solución: Por definición de logaritmo:

$$\begin{aligned}\log_5\{\log_2[\log_3(x-6)]\}=0 &\iff \log_2[\log_3(x-6)]=5^0=1\\ &\iff \log_3(x-6)=2^1=2\\ &\iff x-6=3^2\\ &\iff x=15.\end{aligned}$$

■

2. Un virus muy contagioso (Covid 39) tiene un comportamiento de contagios dada por la relación $x=4+2e^{3t}$, donde t se mide en días y x es la cantidad de contagiados en t días.

   a) ¿Cuántos contagiados hay inicialmente?
   b) ¿Cuántos días pasan para que existan 2004 contagiados?
   Sugerencia: Despeje t y considere que $\ln(10)=2,3$

Solución:

a) Con $t=0$ días, los contagiados son: $x=4+2e^{3\cdot 0}=4+2e^0=6$.
Es decir, inicialmente tenemos 6 contagiados.

b) Despejando t:

$$2004=4+2e^{3t}\iff\frac{2004-4}{2}=e^{3t}\iff\ln(1000)=\ln(e^{3t})\iff\ln(10)^3=3t$$

de donde:

$$3\ln(10)=3t\iff t=\ln(10)=2,3.$$

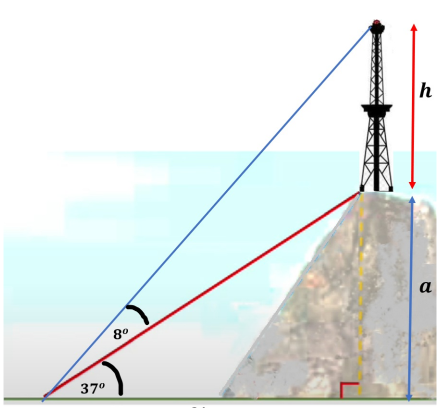
Aproximadamente pasan 2 días para que existan 2004 contagiados.

■

3. Una torre de alta tensión se encuentra ubicada en la cima de un cerro. A 24 $[m]$ de la proyección perpendicular de la cima del cerro sobre la superficie horizontal, los ángulos de elevación hacia la parte más alta de la torre y la cima del cerro son de 45^o y 37^o respectivamente. Calcule la altura de la torre.

Solución: Nos pide la altura de la torre (h). De acuerdo a las condiciones, graficamos lo indicado.

Solución: Nos pide la altura de la torre (h). De acuerdo a las condiciones, graficamos lo indicado.



De la figura se tiene:

$$\begin{aligned}\tan 37^o=\frac{a}{24} &\implies a=24\cdot\tan 37^o\\ &\implies a=24\cdot\frac{3}{4}\\ &\implies a=18\end{aligned}$$

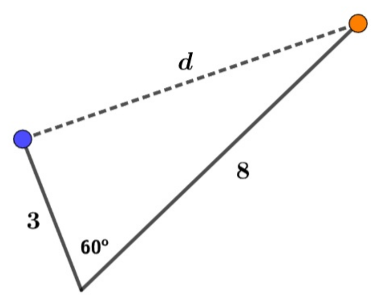
Por otro lado:

$$\begin{aligned}\tan 45^o=\frac{a+h}{24} &\implies a+h=24\cdot\tan 45^o\\ &\implies h=24\cdot 1-a\\ &\implies h=24-18\\ &\implies h=6\end{aligned}$$

Luego la altura de la torre es de 6 m.

■

4. Sofía está sosteniendo dos globos al mismo tiempo. El cordel de uno de los globos mide 8 metros y el del otro mide 3 metros. Sofía observa que el ángulo entre los dos cordeles es de 60^o. ¿Cuál es la distancia que hay entre los dos globos?



Solución: Se pide la distancia d entre los globos. De la figura y por la ley de cosenos tenemos:

$$\begin{aligned} d^2 &= 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cos(60^o) \\ d^2 &= 9 + 64 - 48 \cdot \frac{1}{2} \\ d^2 &= 49 \\ d &= 7 \end{aligned}$$

En consecuencia, los globos se encuentran a una distancia de 7 metros el uno del otro.

■

5. A partir de las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \sec\theta &= \tan B \tan C \\ \sec\beta &= \tan A \tan C \\ \sec\alpha &= \tan A \tan B \\ \cot B \cot C + \cot A \cot C &= 1 - \cot A \cot B \end{aligned}$$

calcule el valor de $\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, considerando que A, B y C representan las medidas de los ángulos internos de un triángulo cualquiera.

Solución: Nos piden el valor de $\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. A partir de las condiciones

$$\begin{aligned} \sec\theta &= \tan B \tan C && \text{(I)} \\ \sec\beta &= \tan A \tan C \\ \sec\alpha &= \tan A \tan B \\ \cot B \cot C + \cot A \cot C &= 1 - \cot A \cot B \end{aligned}$$

De (I), tenemos $\cos\theta = \cot B \cot C$. Asi

$$1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cot B \cot C \qquad \text{(II)}$$

De manera similar

$$1 - 2\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) = \cot A \cot C \qquad \text{(III)}$$

$$1 - 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cot A \cot B \qquad \text{(IV)}$$

Sumando (II), (III) y (IV), obtenemos

$$3 - 2\left[\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] = \underbrace{\cot B \cot C + \cot A \cot C + \cot A \cot B}_{1}$$

Por tanto, $\sin^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1$.

■

Universidad Mayor de San Andrés
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Dirección de Admisión Facultativa

CURSO PRE-FACULTATIVO - CPF II/2025
INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA MAT - 99
2DO EXAMEN PARCIAL - FILA B

Preguntas

1. Resolver la siguiente ecuación logarítmica:

$$\log_7\{\log_3[\log_2(x+4)]\}=0$$

Solución: Por definición de logaritmo:

$$\begin{aligned}\log_7\{\log_3[\log_2(x+4)]\}=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \log_3[\log_2(x+4)]=7^0=1\\ &\Longleftrightarrow \quad \log_2(x+4)=3^1=3\\ &\Longleftrightarrow \quad x+4=2^3\\ &\Longleftrightarrow \quad x=4.\end{aligned}$$

■

2. Un virus muy contagioso (Covid 39) tiene un comportamiento de contagios dada por la relación $x=5+3e^{2t}$, donde t se mide en días y x es la cantidad de contagiados en t días.

   a) ¿Cuántos contagiados hay inicialmente?

   b) ¿Cuántos días pasan para que existan 305 contagiados?
   Sugerencia: Despeje t y considere que $\ln(10)=2,3$

Solución:

a) Con $t=0$ días, los contagiados son: $x=5+3e^{2\cdot 0}=5+3e^0=8$.
Es decir, inicialmente tenemos 8 contagiados.

b) Despejando t:

$$305=5+3e^{2t} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{305-5}{3}=e^{2t} \quad \Longleftrightarrow \quad \ln(100)=\ln(e^{2t}) \quad \Longleftrightarrow \quad \ln(10)^2=2t$$

de donde:

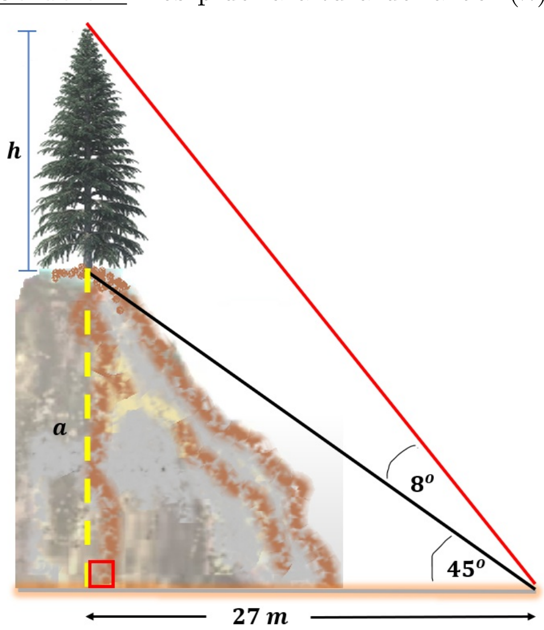
$$2\ln(10)=2t \quad \Longleftrightarrow \quad t=\ln(10)=2,3.$$

Aproximadamente pasan 2 días para que existan 305 contagiados.

■

3. Un árbol de manzana se encuentra ubicada en la cima de un cerro. A $27[m]$ de la proyección perpendicular de la cima del cerro sobre la superficie horizontal, los ángulos de elevación hacia la parte más alta del árbol y la cima del cerro son de 53^o y 45^o respectivamente. Calcule la altura del árbol.

Solución: Nos pide la altura del árbol (h). De acuerdo a las condiciones, graficamos lo indicado.



De la figura se tiene:

$$\begin{aligned}\tan 45^o=\frac{a}{27} \quad &\Longrightarrow \quad a=27\cdot\tan 45^o\\ &\Longrightarrow \quad a=27\cdot 1\\ &\Longrightarrow \quad a=27\end{aligned}$$

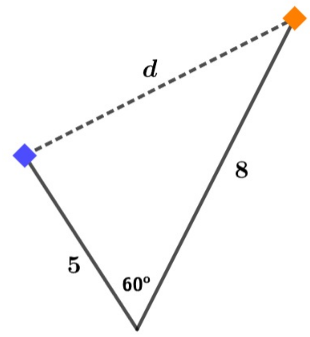
Por otro lado:

$$\begin{aligned}\tan 53^o=\frac{a+h}{27} \quad &\Longrightarrow \quad a+h=27\cdot\tan 53^o\\ &\Longrightarrow \quad h=27\cdot\frac{4}{3}-a\\ &\Longrightarrow \quad h=36-27=9\end{aligned}$$

Luego la altura del árbol es de 9 m.

■

4. Pedro esta haciendo volar dos cometas al mismo tiempo; la cuerda de una de las cometas mide 5 metros y la otra mide 8 metros. Pedro estima que el ángulo entre las cuerdas es de 60^o. ¿Cuál es la distancia entre las cometas?.



<u>Solución:</u> Se pide la distancia d entre las cometas. De la figura y por la ley de cosenos tenemos:

$$\begin{aligned}
d^2 &= 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cos(60^o) \\
d^2 &= 25 + 64 - 80 \cdot \frac{1}{2} \\
d^2 &= 49 \\
d &= 7
\end{aligned}$$

En consecuencia, las cometas se encuentran a una distancia de 7 metros el uno del otro.

■

5. A partir de las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}
\sec\theta &= \tan B \tan C \\
\sec\beta &= \tan A \tan C \\
\sec\alpha &= \tan A \tan B \\
\cot B \cot C &= 1 - \cot A \cot B - \cot A \cot C
\end{aligned}$$

calcule el valor de $\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, considerando que A, B y C representan las medidas de los ángulos internos de un triángulo cualquiera.

<u>Solución:</u> Nos piden el valor de $\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. A partir de las condiciones

$$\begin{aligned}
\sec\theta &= \tan B \tan C \qquad \text{(I)} \\
\sec\beta &= \tan A \tan C \\
\sec\alpha &= \tan A \tan B \\
\cot B \cot C + \cot A \cot C &= 1 - \cot A \cot B
\end{aligned}$$

De (I), tenemos $\cos\theta = \cot B \cot C$. Asi

$$1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cot B \cot C \qquad \text{(II)}$$

De manera similar

$$1 - 2\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) = \cot A \cot C \qquad \text{(III)}$$

$$1 - 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cot A \cot B \qquad \text{(IV)}$$

Sumando (II), (III) y (IV), obtenemos

$$3 - 2\left[\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] = \underbrace{\cot B \cot C + \cot A \cot C + \cot A \cot B}_{1}$$

Por tanto, $\sin^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1$.

■